ADAPTADORES DE IMPEDANCIA Y ATENUADORES

En la presente Nota se obtendrán las expresiones para el cálculo de los elementos, que componen un cuadripolo, que adapta la impedancia de un generador y una carga, suponiendo en primer lugar que son distintas y luego que ambas tienen el mismo valor.
Comenzaremos el desarrollo, suponiendo que la impedancia del generador es igual a la impedancia imagen de entrada del cuadripolo propuesto (Zim1) y que la impedancia de carga es igual a la impedancia imagen de salida del mismo (Zim2).
El desarrollo se realizará a partir de un cuadripolo del tipo T tal como el de la Figura 1.

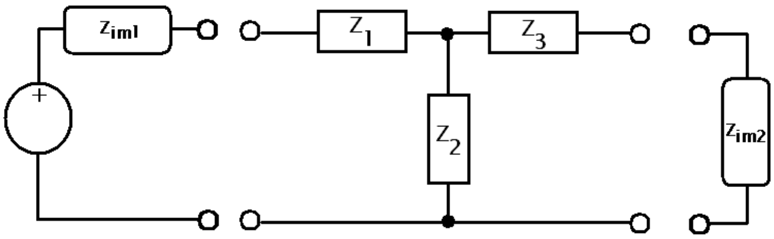


Figura 1.

Recordando algunas expresiones de cuadripolos cargados con impedancias imagen (Zim1 y Zim2) tenemos :

$$\boxed{Zim1 = \sqrt{\frac{A \bullet B}{C \bullet D}}} \quad [1] \qquad \text{y} \qquad \boxed{Zim2 = \sqrt{\frac{B \bullet D}{A \bullet C}}} \quad [2]$$

si el cuadripolo fuera simétrico A=D por lo tanto tenemos :

$$\boxed{Zo = Zim1 = Zim2 = \sqrt{\frac{B}{C}}} \quad [3]$$

Veamos otras identidades que serán de utilidad :

$$\boxed{\frac{Zim1}{Zim2} = \frac{\sqrt{\frac{A \bullet B}{C \bullet D}}}{\sqrt{\frac{B \bullet D}{A \bullet C}}} = \frac{A}{D}} \quad [4] \qquad \text{y} \qquad \boxed{Zim1 \bullet Zim2 = \sqrt{\frac{A \bullet B}{C \bullet D}} \bullet \sqrt{\frac{B \bullet D}{A \bullet C}} = \sqrt{\frac{B}{C}}} \quad [5]$$

A partir de las expresiones [4] y [5] podemos escribir :

$$\boxed{\sqrt{\frac{Zim1}{Zim2}} = \sqrt{\frac{A}{D}}} \quad [6] \qquad \boxed{\sqrt{Zim1 \bullet Zim2} = \sqrt{\frac{B}{C}}} \quad [7]$$

Recordando las expresiones de la función de propagación de cuadripolos cargados con impedancias imágenes tenemos :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{Ein}{Eout} &= \sqrt{\frac{Zim1}{Zim2}} \bullet \left(\sqrt{A \bullet D} + \sqrt{A \bullet D - 1}\right) = \sqrt{\frac{Zim1}{Zim2}} \bullet \left(\cosh\theta + senh\theta\right) = \\ \frac{Ein}{Eout} &= \sqrt{\frac{Zim1}{Zim2}} \bullet e^{\theta} = \sqrt{\frac{Zim1}{Zim2}} \bullet e^{a+jb} = \sqrt{\frac{Zim1}{Zim2}} \bullet e^{a} \bullet e^{jb} \end{aligned}} \quad [8]$$

De la última expresión vemos que :

$$\boxed{\sqrt{A\bullet D}=\cosh\theta}\ [9] \qquad y \qquad \boxed{\sqrt{A\bullet D-1}=\sqrt{B\bullet C}=senh\theta}\ [10]$$

Multiplicando [6] por [9] obtenemos :

$$\sqrt{\frac{Zim1}{Zim2}}=\sqrt{\frac{A}{D}}$$

$$X \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{\frac{Zim1}{Zim2}}\bullet\cosh\theta=\sqrt{\frac{A}{D}}\bullet\sqrt{A\bullet D} \qquad \therefore \qquad A=\sqrt{\frac{Zim1}{Zim2}}\bullet\cosh\theta \qquad [11]$$

$$\sqrt{A\bullet D}=\cosh\theta$$

Multiplicando [7] por [10] obtenemos :

$$\sqrt{Zim1\bullet Zim2}=\sqrt{\frac{B}{C}}$$

$$X \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{Zim1\bullet Zim2}\bullet senh\theta=\sqrt{\frac{B}{C}}\bullet\sqrt{B\bullet C}\ \therefore \qquad B=\sqrt{Zim1\bullet Zim2}\bullet senh\theta \qquad [11]$$

$$\sqrt{B\bullet C}=senh\theta$$

Dividiendo [10] por [7] obtenemos :

$$\sqrt{B\bullet C}=senh\theta$$

$$\div \qquad \Rightarrow \qquad \frac{senh\theta}{\sqrt{Zim1\bullet Zim2}}=\frac{\sqrt{B\bullet C}}{\sqrt{\frac{B}{C}}}\bullet \qquad \therefore \qquad C=\frac{senh\theta}{\sqrt{Zim1\bullet Zim2}} \qquad [12]$$

$$\sqrt{Zim1\bullet Zim2}=\sqrt{\frac{B}{C}}$$

Dividiendo [9] por [6] obtenemos :

$$\sqrt{A\bullet D}=\cosh\theta$$

$$\div \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\cosh\theta}{\sqrt{\frac{Zim1}{Zim2}}}=\frac{\sqrt{A\bullet D}}{\sqrt{\frac{A}{D}}} \qquad \therefore \qquad D=\frac{\cosh\theta}{\sqrt{\frac{Zim1}{Zim2}}}=\sqrt{\frac{Zim2}{Zim1}}\bullet\cosh\theta \qquad [13]$$

$$\sqrt{\frac{Zim1}{Zim2}}=\sqrt{\frac{A}{D}}$$

Recordando algunas definiciones vistas de parámetros de transmisión directa y la expresión [11] Despejamos el valor de Z1 :

$$A=\frac{Z_{11}}{Z_{21}}=\frac{Z1+Z2}{Z2}=\sqrt{\frac{Zim1}{Zim2}}\bullet\cosh\theta \qquad \therefore \qquad Z1=\left(\sqrt{\frac{Zim1}{Zim2}}\bullet\cosh\theta * Z2\right)-Z2 \qquad [14]$$

De la expresión [12] se obtiene el valor de Z2 :

$$C = \frac{1}{Z_{21}} = \frac{1}{Z2} = \frac{senh\theta}{\sqrt{Zim1 \bullet Zim2}} \quad \therefore \quad Z2 = \frac{\sqrt{Zim1 \bullet Zim2}}{senh\theta} \qquad [15]$$

Reemplazando en [14] el valor de Z2 obtenido en [15] obtenemos el valor de Z1:

$$Z1 = \left(\sqrt{\frac{Zim1}{Zim2}} \bullet \cosh\theta * Z2\right) - Z2 = \left(\sqrt{\frac{Zim1}{Zim2}} \bullet \cosh\theta * \frac{\sqrt{Zim1 \bullet Zim2}}{senh\theta}\right) - \frac{\sqrt{Zim1 \bullet Zim2}}{senh\theta}$$

$$Z1 = \frac{Zim1 \bullet \cosh\theta}{senh\theta} - \frac{\sqrt{Zim1 \bullet Zim2}}{senh\theta} \quad \Rightarrow \quad Z1 = \frac{Zim1 \bullet \cosh\theta - \sqrt{Zim1 \bullet Zim2}}{senh\theta} \qquad [16]$$

Para obtener el valor de Z3 utilizamos la expresión [13]

$$D = \frac{Z_{22}}{Z_{21}} = \frac{Z2 + Z3}{Z2} = \sqrt{\frac{Zim2}{Zim1}} \bullet \cosh\theta \quad \therefore \quad Z3 = \left(\sqrt{\frac{Zim2}{Zim1}} \bullet \cosh\theta * Z2\right) - Z2 \qquad [17]$$

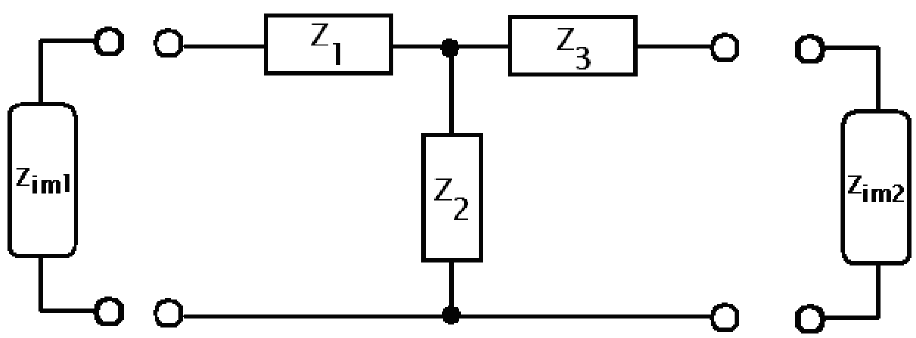
Reemplazando en [17] el valor de Z2 obtenido en [15] obtenemos el valor de Z3 :

$$Z3 = \left(\sqrt{\frac{Zim2}{Zim1}} \bullet \cosh\theta * Z2\right) - Z2 = \left(\sqrt{\frac{Zim2}{Zim1}} \bullet \cosh\theta * \frac{\sqrt{Zim1 \bullet Zim2}}{senh\theta}\right) - \frac{\sqrt{Zim1 \bullet Zim2}}{senh\theta}$$

$$Z3 = \frac{Zim2 \bullet \cosh\theta}{senh\theta} - \frac{\sqrt{Zim1 \bullet Zim2}}{senh\theta} \quad \Rightarrow \quad Z3 = \frac{Zim2 \bullet \cosh\theta - \sqrt{Zim1 \bullet Zim2}}{senh\theta} \qquad [18]$$

La Figura 2, resume los resultados obtenidos.

$$Z1 = \frac{Zim1 \bullet \cosh\theta - \sqrt{Zim1 \bullet Zim2}}{senh\theta} \qquad Z3 = \frac{Zim2 \bullet \cosh\theta - \sqrt{Zim1 \bullet Zim2}}{senh\theta}$$



$$Z2 = \frac{\sqrt{Zim1 \bullet Zim2}}{senh\,\theta}$$

Figura 2. Valores de los elementos que componen un cuadripolo adaptador de impedancias.

Para calcular los componentes del cuadripolo propuesto, nos falta definir un elemento, este es θ.
Para obtener el valor de θ , recordamos la expresión [8].

$$\frac{Ein}{Eout} = \sqrt{\frac{Zim1}{Zim2}} \bullet \left(\sqrt{A \bullet D} + \sqrt{A \bullet D - 1}\right) = \sqrt{\frac{Zim1}{Zim2}} \bullet \left(\cosh\theta + senh\theta\right) =$$
$$\frac{Ein}{Eout} = \sqrt{\frac{Zim1}{Zim2}} \bullet e^{\theta} = \sqrt{\frac{Zim1}{Zim2}} \bullet e^{a+jb} = \sqrt{\frac{Zim1}{Zim2}} \bullet e^{a} \bullet e^{jb} \qquad [8]$$

Despejando θ tendremos :

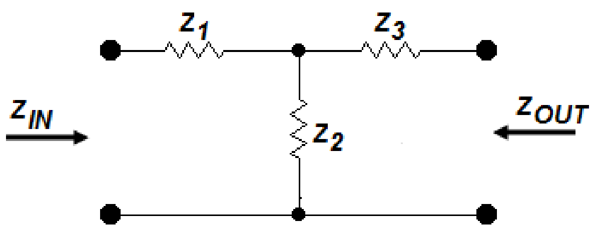
$$\theta = Ln\left(\frac{Ein}{Eout} \bullet \sqrt{\frac{Zim2}{Zim1}}\right) = a + jb$$
$$a = Ln\left\|\left(\frac{Ein}{Eout} \bullet \sqrt{\frac{Zim2}{Zim1}}\right)\right\|$$
$$b = tg^{-1}\left[\frac{\operatorname{Im}\left(\frac{Ein}{Eout} \bullet \sqrt{\frac{Zim2}{Zim1}}\right)}{\operatorname{Re}\left(\frac{Ein}{Eout} \bullet \sqrt{\frac{Zim2}{Zim1}}\right)}\right]$$

A continuación veremos un ejemplo obtenido a partir de MATLAB utilizando el archivo ***Cuadri_Zin_Zout.m***
Se desea obtener un cuadripolo que adapte un generador cuya impedancia es de 50 Ω con una carga cuya impedancia es de 300 Ω. La funcion de propagación Ein/Eout del cuadripolo se propone que sea de 2, para cuando el mismo, esté cargado con las impedancias imágenes.
El programa ***Cuadri_Zin_Zout.m*** calcula, además los valores de todos los parámetros del cuadripolo propuesto (Z, ABCD, ZK1, ZK2,ZIM1,ZIM2 y las funciones de propagación para cada caso).

Valor de ZIN [Ohms] ? 50

Valor de ZOUT [Ohms] ? 300

Valor de EIN/EOUT ? 2



Atenuación ALFA = log((Ein/Eout)*sqrt(ZOUT/ZIN)) = 1.5890 [Neppers]

Z1 = (ZIN*cosh(ALFA)-sqrt(ZIN*ZOUT))/sinh(ALFA) = 2.1739 [Ohms]
Z2 = (sqrt(ZIN*ZOUT))/sinh(ALFA) = 52.1739 [Ohms]
Z3 = (ZOUT*cosh(ALFA)-sqrt(ZIN*ZOUT))/sinh(ALFA) = 273.9130 [Ohms]

<u>PARAMETROS IMPEDANCIA</u>

Z11 = Z1 + Z2 = 54.3478 [Ohms]
Z12 = Z21 = Z2 = 52.1739 [Ohms]

Z22 = Z2 + Z3 = 326.087 [Ohms]
AZ = Z11*Z22-Z12*Z21 = 15000 [Ohms^2]

PARAMETROS TRANSMISION DIRECTA

A = Z11/Z21 = 1.0417 [Adim]
B = AZ/Z21 = 287.5 [Ohms^2]
C = 1/Z21 = 0.019167 [Mho]
D = Z22/Z21 = 6.25 [Adim]

CALCULO DE LA IMPEDANCIA ITERATIVA

ZK1 = (-(A-D)/(2*C))+sqrt(((A-D)/(2*C))^2+(B/C)) = 318.7918 [Ohms]
ZK2 = (-(D-A)/(2*C))+sqrt(((D-A)/(2*C))^2+(B/C)) = 47.0527 [Ohms]

CALCULO DE LA IMPEDANCIA IMAGEN

ZIM1 = sqrt((A*B)/(C*D)) = 50 [Ohms]
ZIM2 = sqrt((B*D)/(A*C)) = 300 [Ohms]

CALCULO DE LA FUNCION DE PROPAGACIÓN EN BASE ITERATIVA

Fun_Prop_It= ((A+D)/2)+sqrt(((A+D)/2)^2-1)
Fun_Prop_ZIt= 7.1518 [Adim]

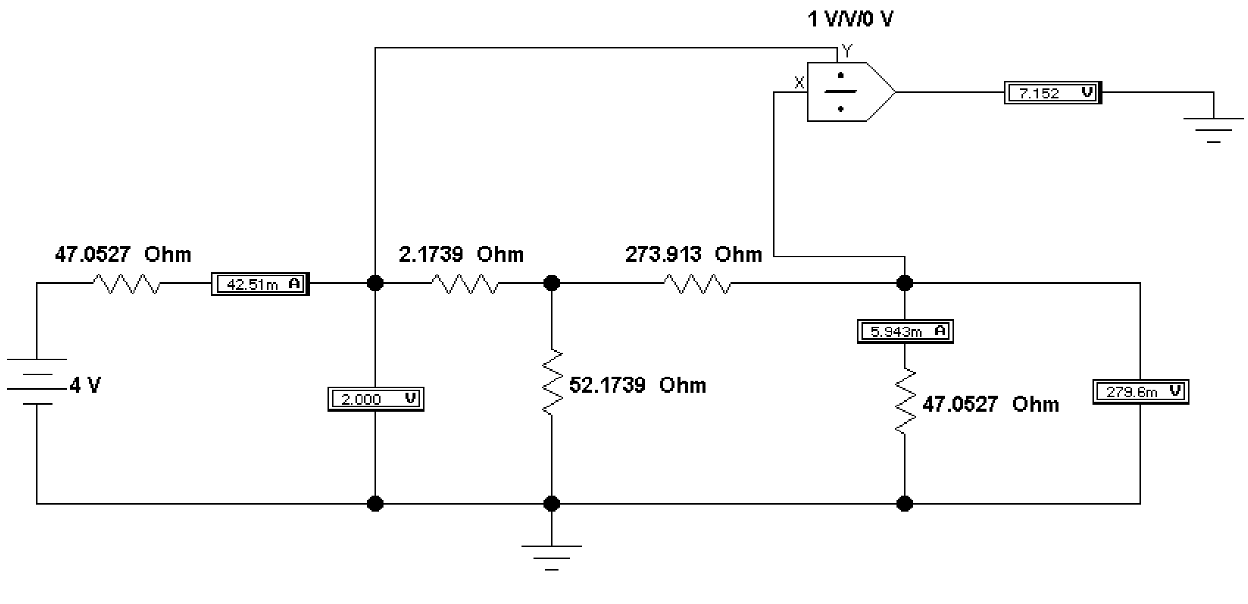
CALCULO DE LA FUNCION DE PROPAGACIÓN EN BASE IMAGEN

Fun_Prop_Im= sqrt(A/D)*((sqrt(A*D))+sqrt((A*D)-1))
Fun_Prop_ZIm= 2 [Adim]

COMPROBACION DE LA FUNCION DE PROPAGACIÓN EN BASE ITERATIVA

Fun_Prop_Zit_COMP = Ein/Eout
Fun_Prop_Zit_COMP = Z1+(Z2*(Z3+ZK2)/(Z2+Z3+ZK2))/(Z2*(Z3+ZK2)/(Z2+Z3+ZK2))*ZK2/(Z3+ZK2)
Fun_Prop_Zit_COMP = 7.1518 [Adim]

COMPROBACION DE LA FUNCION DE PROPAGACIÓN EN BASE ITERATIVA MEDIANTE EWB5



COMPROBACION DE LA FUNCION DE PROPAGACIÓN EN BASE IMAGEN

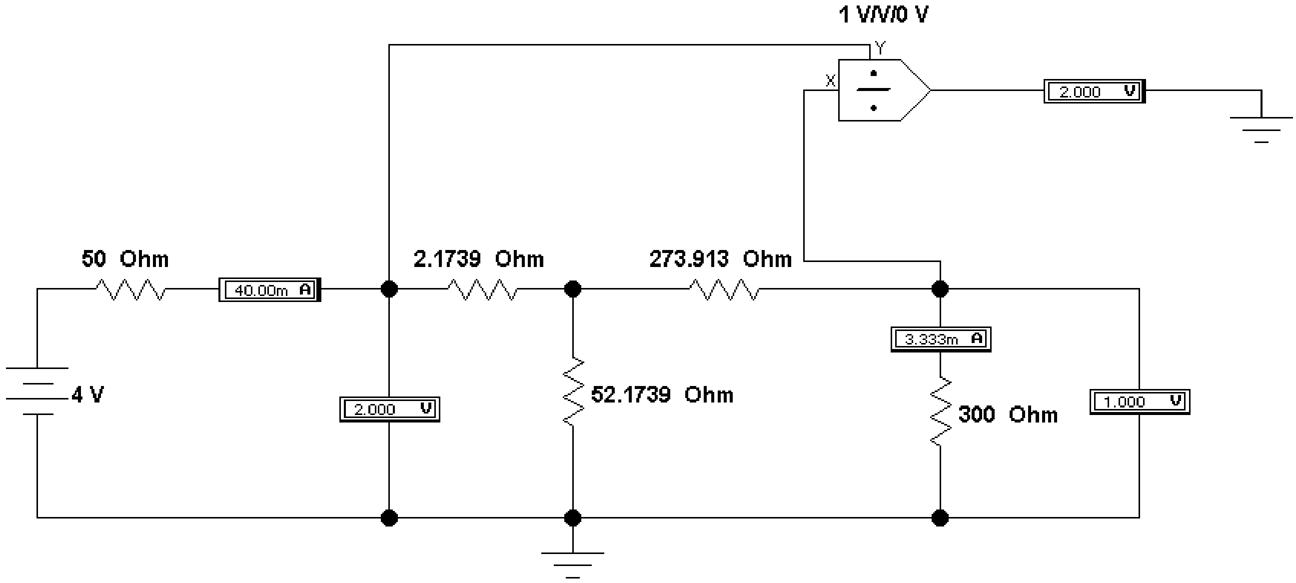
Fun_Prop_Zim_COMP = Ein/Eout

Fun_Prop_Zim_COMP = Z1+(Z2*(Z3+ZIM2)/(Z2+Z3+ZIM2)))/((Z2*(Z3+ZIM2)/(Z2+Z3+ZIM2))*(ZIM2/(Z3+ZIM2)))

Fun_Prop_Zim_COMP = 2 [Adim]

COMPROBACION DE LA FUNCION DE PROPAGACIÓN EN BASE IMAGEN

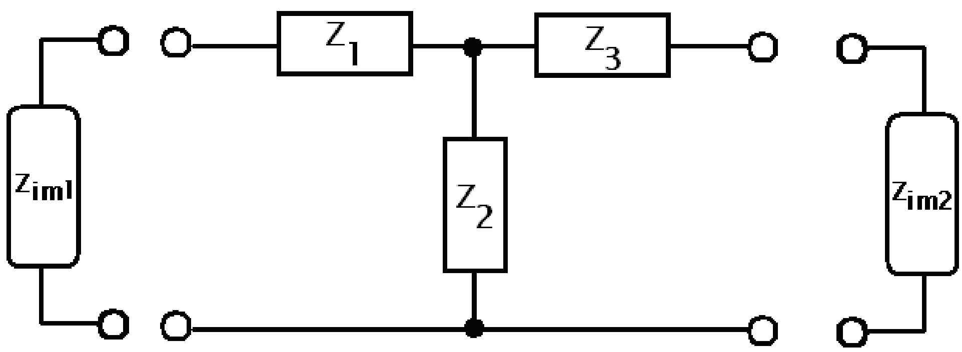
MEDIANTE EWB5



ATENUADORES

Para el desarrollo de atenuadores, partiremos de un **cuadripolo simétrico**, compuesto por un **circuito en T**, **resistivo puro**.
Recordamos las expresiones obtenidas en el desarrollo del cuadripolo adaptador de impedancias :

$$\boxed{Z1 = \frac{Zim1 \bullet \cosh\theta - \sqrt{Zim1 \bullet Zim2}}{senh\,\theta}} \quad [16] \qquad \boxed{Z3 = \frac{Zim2 \bullet \cosh\theta - \sqrt{Zim1 \bullet Zim2}}{senh\,\theta}} \quad [18]$$



$$\boxed{Z2 = \frac{\sqrt{Zim1 \bullet Zim2}}{senh\,\theta}} \quad [15]$$

Dado que el cuadripolo será simétrico tendremos que Z1 = Z3 y por lo tanto $Z_{11} = Z_{22}$ y además en los parámetros de transmisión directa A = D.
Recordamos la expresión [3] mencionada en párrafos anteriores :

$$\boxed{Zo = Zim1 = Zim2 = \sqrt{\frac{B}{C}}} \quad [3]$$

Como el cuadripolo propuesto, es simético y estará formado exclusivamente por resistores, tendremos que la función de fase será igual a cero, entonces, podemos escribir que la atenuación $\Theta = \alpha$ (constante de atenuación en base característica) .
Modificando las expresiones [16], [15] y [18] de la figura anterior, con la igualdad indicada por la expresión [3] y reemplazando θ por α, obtenemos :

$$\boxed{Z1 = Z3 = \frac{Zo \bullet \cosh\alpha - Zo}{senh\alpha}} \quad [19]$$

$$\boxed{Z2 = \frac{Zo}{senh\alpha}} \quad [20]$$

Podemos escribir las expresiones normalizadas de Z1 y Z2 para un cuadripolo T simétrico, para una carga Zon de 1 Ω, (Z1n y Z2n), de tal modo que a los valores obtenidos se los deberá multiplicar por la impedancia de carga propuesta para desnormalizar.

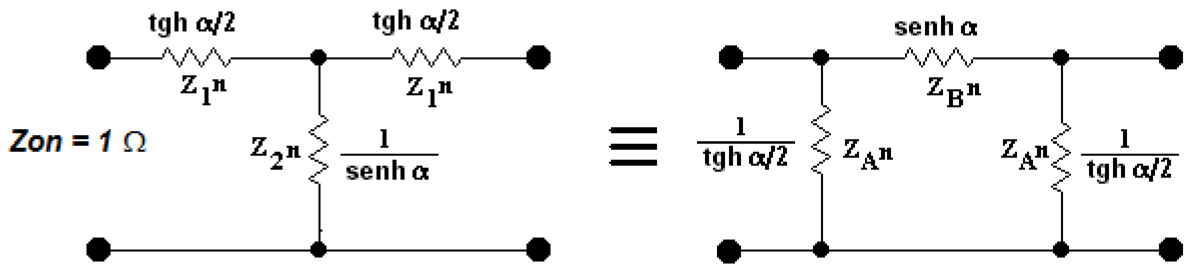
$$\boxed{Z1n = Z3n = \frac{Zon \bullet \cosh\alpha - Zon}{senh\alpha}} \quad [21] \quad \text{como Zon} = 1\Omega \quad \boxed{Z1n = Z3n = \frac{\cosh\alpha - 1}{senh\alpha}} \quad [22]$$

$$\boxed{Z2n = \frac{Zon}{senh\alpha} = \frac{1}{senh\alpha}} \quad [23]$$

La expresión [22] puede escribirse de otra manera aplicando igualdades algebráicas :

$$\boxed{Z1n = Z3n = \frac{\cosh\alpha - 1}{senh\alpha} = tgh\frac{\alpha}{2}} \quad [24]$$

En la siguiente figura se muestran las expresiones obtenidas en el desarrollo del cuadripolo tipo T, Atenuador normalizado para Zon = 1 Ω y se agregan además los valores para el caso que se desee implementar el atenuador mediante un cuadripolo del tipo π .



$Z_{\#} = Z_{\#n} * Ro\ [\Omega]$

Ejemplo: se tiene una carga de 8 Ω sobre los cuales se desea obtener 16 voltios a partir de una fuente de 40 Volts.

$$\alpha = \mathbf{Ln}\ \frac{E_{IN}}{E_{OUT}} = \mathbf{Ln}\ \frac{40}{16} = \mathbf{0{,}91629\ [neppers]}$$

Aplicando [24]

$$\boxed{Z1n = Z3n = tgh\frac{\alpha}{2} = tgh\frac{0{,}915238}{2} = 0{,}49429[\Omega]} \quad [25]$$

Aplicando [23] :

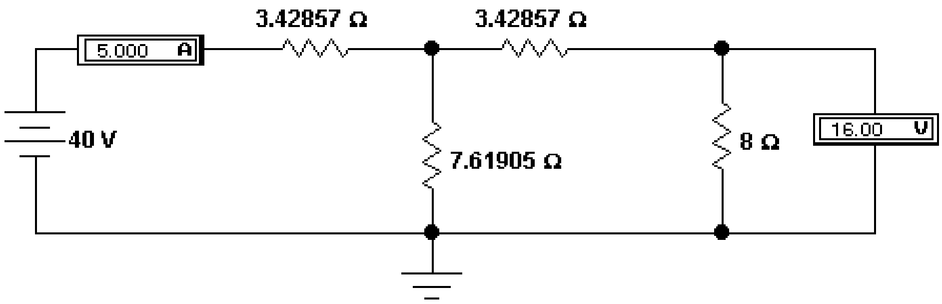
$$\boxed{Z2n = \frac{1}{senh\alpha} = \frac{1}{senh(0{,}91629)} = 0{,}95238[\Omega]} \quad [26]$$

Aplicando la desnormalización tenemos :

$$Z_1 = Z_3 = Z_{1n} * Ro\ [\Omega] = 0{,}49429 * 8\ [\Omega] = 3{,}95437\ [\Omega]$$

$$Z_2 = Z_{2n} * Ro\ [\Omega] = 0{,}95238 * 8\ [\Omega] = 7{,}61905\ [\Omega]$$

Realizamos la comprobación mediante Electronic Work Bench :



IDENTIDADES ALGEBRAICAS DE UTILIDAD

$$senhX = \frac{e^X - e^{-X}}{2} \qquad \cosh X = \frac{e^X + e^{-X}}{2}$$

$$tgX = \frac{senhX}{\cosh X} = \frac{e^X - e^{-X}}{e^X + e^{-X}} \qquad \cosh^2 X - senh^2 X = 1$$

$$e^X = \cosh X + senhX \qquad e^{2X} = \frac{1 + tgX}{1 - tgX}$$

$$senh\frac{X}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cosh X - 1}{2}} \qquad \cosh\frac{X}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cosh X + 1}{2}}$$

$$tgh\frac{X}{2} = \frac{\cosh X - 1}{senhX}$$

$$Si \Rightarrow \cosh X = U \qquad senhX = \sqrt{U^2 - 1}$$

$$Si \Rightarrow senhX = U \qquad \cosh X = \sqrt{U^2 + 1}$$