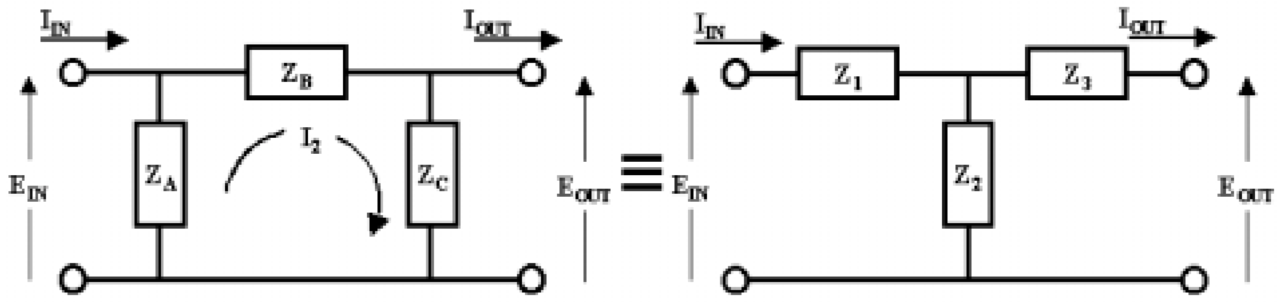
TRANSFORMACIÓN DE CUADRIPOLOS TIPO "π" O "TRIÁNGULO" EN TIPO "T" O "ESTRELLA" Y VICEVERSA



Escribimos el conhunto de matrices asociadas con cada cuadripolo:

π

$$\begin{vmatrix} Z_A & -Z_A & 0 \\ -Z_A & Z_A + Z_B + Z_C & -Z_C \\ 0 & -Z_C & -Z_C \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} I_{IN} \\ I_2 \\ I_{OUT} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_{IN} \\ 0 \\ E_{OUT} \end{vmatrix}$$

T

$$\begin{vmatrix} Z_1 + Z_2 & -Z_2 \\ -Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} I_{IN} \\ I_{IOUT} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_{IN} \\ E_{IOUT} \end{vmatrix}$$

Para que los cuadripolos sean iguales debe cumplirse que :

$$Z_{ENTRADA\_\pi} = Z_{ENTRADA\_T}$$

$$Z_{SALIDA\_\pi} = Z_{SALIDA\_T}$$

$$Z_{TRANSFERENCIA\_\pi} = Z_{TRANSFERENCIA\_T}$$

Obtenemos los valores de impedancia de entrada, transferencia y salida del cuadripolo π :

$$Z_{ENTRADA\_\pi} = \frac{\Delta_P}{\Delta_{11}} = \frac{Z_A^2 * Z_C + Z_A * Z_B * Z_C + Z_A * Z_C^2 - Z_A^2 * Z_C - Z_A * Z_C^2}{Z_A * Z_C + Z_B * Z_C + Z_C^2 - Z_C^2}$$

$$Z_{ENTRADA\_\pi} = \frac{Z_A * Z_B * Z_C}{Z_A * Z_C + Z_B * Z_C} = \frac{Z_A * Z_B * Z_C}{Z_C * (Z_A + Z_B)}$$

$$\boxed{Z_{ENTRADA\_\pi} = \frac{Z_A * Z_B}{Z_A + Z_B}}$$

$$Z_{SALIDA\_\pi} = \frac{\Delta_P}{\Delta_{33}} = \frac{Z_A^{\,2} * Z_C + Z_A * Z_B * Z_C + Z_A * Z_C^{\,2} - Z_A^{\,2} * Z_C - Z_A * Z_C^{\,2}}{Z_A^{\,2} + Z_A * Z_B + Z_A * Z_C - Z_A^{\,2}}$$

$$Z_{SDALIDA\_\pi} = \frac{Z_A * Z_B * Z_C}{Z_A * Z_B + Z_A * Z_C} = \frac{Z_A * Z_B * Z_C}{Z_A * (Z_B + Z_C)}$$

$$\boxed{Z_{SALIDA\_\pi} = \frac{Z_B * Z_C}{Z_B + Z_C}}$$

$$Z_{TANSFERENCIA\_\pi} = \frac{\Delta_P}{\Delta_{13}} = \frac{Z_A^{\,2} * Z_C + Z_A * Z_B * Z_C + Z_A * Z_C^{\,2} - Z_A^{\,2} * Z_C - Z_A * Z_C^{\,2}}{Z_A * Z_C}$$

$$Z_{TRANSFERENCIA\_\pi} = \frac{Z_A * Z_B * Z_C}{Z_A * Z_C}$$

$$\boxed{Z_{TRANSFERENCIA\_\pi} = Z_B}$$

Obtenemos los valores de impedancia de entrada, transferencia y salida del cuadripolo T :

$$Z_{ENTRADA\_T} = \frac{\Delta_P}{\Delta_{11}} = \frac{Z_1 * Z_2 + Z_1 * Z_3 + Z_2^{\,2} + Z_2 * Z_3 - Z_2^{\,2}}{Z_2 + Z_3}$$

$$\boxed{Z_{ENTRADA\_T} = \frac{Z_1 * Z_2 + Z_1 * Z_3 + Z_2 * Z_3}{Z_2 + Z_3}}$$

$$Z_{SALIDA\_T} = \frac{\Delta_P}{\Delta_{22}} = \frac{Z_1 * Z_2 + Z_1 * Z_3 + Z_2^{\,2} + Z_2 * Z_3 - Z_2^{\,2}}{Z_1 + Z_2}$$

$$\boxed{Z_{SALIDA\_T} = \frac{Z_1 * Z_2 + Z_1 * Z_3 + Z_2 * Z_3}{Z_1 + Z_2}}$$

$$Z_{TRANSFERENCIA\_T} = \frac{\Delta_P}{\Delta_{12}} = \frac{Z_1 * Z_2 + Z_1 * Z_3 + Z_2^{\,2} + Z_2 * Z_3 - Z_2^{\,2}}{Z_2}$$

$$\boxed{Z_{TRANSFERENCIA\_T} = \frac{Z_1 * Z_2 + Z_1 * Z_3 + Z_2 * Z_3}{Z_2}}$$

Igualando las impedancias de los cuadripolos " π " y " T " tendremos :

1 $$Z_{ENTRADA} \Leftrightarrow \frac{Z_A * Z_B}{Z_A + Z_B} = \frac{Z_1 * Z_2 + Z_1 * Z_3 + Z_2 * Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

2 $$Z_{SALIDA} \Leftrightarrow \frac{Z_B * Z_C}{Z_B + Z_C} = \frac{Z_1 * Z_2 + Z_1 * Z_3 + Z_2 * Z_3}{Z_1 + Z_2}$$

3 $$Z_{TRANSFERENCIA} \Leftrightarrow Z_B = \frac{Z_1 * Z_2 + Z_1 * Z_3 + Z_2 * Z_3}{Z_2} = \frac{\Delta_{ZT}}{Z_2}$$

Sustituimos Z_B en (1) y (2):

1'

$$\frac{Z_A * Z_B}{Z_A + Z_B} = \frac{Z_A * \frac{\Delta_{ZT}}{Z_2}}{Z_A + \frac{\Delta_{ZT}}{Z_2}} = \frac{\Delta_{ZT}}{Z_2 + Z_3}$$

$$Z_A * \frac{1}{Z_2} = Z_A * \frac{1}{Z_2 + Z_3} + \frac{\Delta_{ZT}}{Z_2} * \frac{1}{Z_2 + Z_3}$$

$$Z_A * \left(\frac{1}{Z_2} - \frac{1}{Z_2 + Z_3} \right) = \frac{\Delta_{ZT}}{Z_2 (Z_2 + Z_3)}$$

$$Z_A = \frac{\Delta_{ZT}}{Z_2 (Z_2 + Z_3)} * \frac{1}{\left(\frac{1}{Z_2} - \frac{1}{Z_2 + Z_3} \right)}$$

$$Z_A = \frac{\Delta_{ZT}}{Z_2 (Z_2 + Z_3)} * \frac{1}{\frac{Z_2 + Z_3 - Z_2}{Z_2 (Z_2 + Z_3)}}$$

$$\boxed{Z_A = \frac{\Delta_{ZT}}{Z_3}}$$

2'

$$\frac{Z_B * Z_C}{Z_B + Z_C} = \frac{\frac{\Delta_{ZT}}{Z_2} * Z_C}{\frac{\Delta_{ZT}}{Z_2} + Z_C} = \frac{\Delta_{ZT}}{Z_1 + Z_2}$$

$$Z_C * \frac{1}{Z_2} = Z_C * \frac{1}{Z_1 + Z_2} + \frac{\Delta_{ZT}}{Z_2} * \frac{1}{Z_1 + Z_2}$$

$$Z_C * \left(\frac{1}{Z_2} - \frac{1}{Z_1 + Z_2} \right) = \frac{\Delta_{ZT}}{Z_2 (Z_1 + Z_2)}$$

$$Z_C = \frac{\Delta_{ZT}}{Z_2 (Z_1 + Z_2)} * \frac{1}{\left(\frac{1}{Z_2} - \frac{1}{Z_1 + Z_2} \right)}$$

$$Z_C = \frac{\Delta_{ZT}}{Z_2 (Z_1 + Z_2)} * \frac{1}{\frac{Z_1 + Z_2 - Z_2}{Z_2 (Z_1 + Z_2)}}$$

$$\boxed{Z_C = \frac{\Delta_{ZT}}{Z_1}}$$

Finalmente de tendremos:

$$\boxed{Z_A = \frac{\Delta_{ZT}}{Z_3}} \qquad \boxed{Z_B = \frac{\Delta_{ZT}}{Z_2}} \qquad \boxed{Z_C = \frac{\Delta_{ZT}}{Z_1}}$$

Sumando las tres últimas expresiones:

$$Z_A + Z_B + Z_C = \frac{\Delta_{ZT}}{Z_3} + \frac{\Delta_{ZT}}{Z_2} + \frac{\Delta_{ZT}}{Z_1}$$

Sacando común denominador:

$$Z_A + Z_B + Z_C = \frac{\Delta_{ZT}\left(Z_1 * Z_2 + Z_1 * Z_3 + Z_2 * Z_3\right)}{Z_1 * Z_2 * Z_3}$$

pero recordando que :

$$\Delta_{ZT} = \left(Z_1 * Z_2 + Z_1 * Z_3 + Z_2 * Z_3\right)$$

$$\boxed{Z_A + Z_B + Z_C = \frac{\Delta_{ZT}^{\ 2}}{Z_1 * Z_2 * Z_3}}$$

Calculamos la inversa de la última expresión:

$$\frac{1}{Z_A + Z_B + Z_C} = \frac{Z_1 * Z_2 * Z_3}{\Delta_{ZT}^{\ 2}} = \frac{Z_1 * Z_2 * Z_3}{\Delta_{ZT} * \Delta_{ZT}}$$

Recordando:

$$Z_A = \frac{\Delta_{ZT}}{Z_3} \qquad Z_B = \frac{\Delta_{ZT}}{Z_2} \qquad Z_C = \frac{\Delta_{ZT}}{Z_1}$$

Podemos despejar:

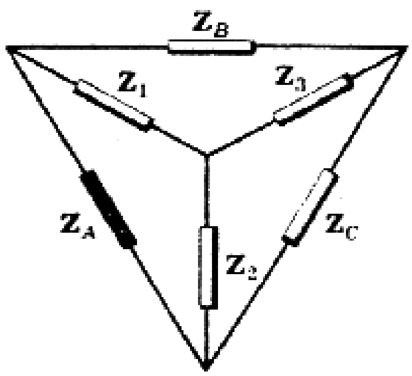
$$\boxed{Z_1 = \frac{Z_A * Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C}}$$

$$\boxed{Z_2 = \frac{Z_A * Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}}$$

$$\boxed{Z_3 = \frac{Z_B * Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}}$$

Finalmente para pasar de cuadripolo tipo "T" a tipo "π" y viceversa tendremos:

"T" $\Rightarrow$ "π"



"π" $\Rightarrow$ "T"

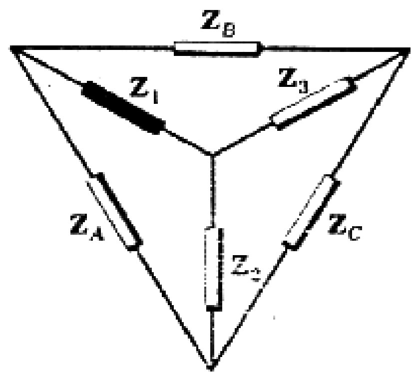


Figura 1

$$Z_A = \frac{Z_1 * Z_2 + Z_1 * Z_3 + Z_2 * Z_3}{Z_3}$$

$$Z_1 = \frac{Z_A * Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

$$Z_B = \frac{Z_1 * Z_2 + Z_1 * Z_3 + Z_2 * Z_3}{Z_2}$$

$$Z_2 = \frac{Z_A * Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

$$Z_C = \frac{Z_1 * Z_2 + Z_1 * Z_3 + Z_2 * Z_3}{Z_1}$$

$$Z_3 = \frac{Z_B * Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

Para determinar las relaciones anteriores son útiles las siguientes reglas mnemotécnicas:

1. Transformación "T" $\Rightarrow$ "π"

Cualquier impedancia del circuito en "π" es igual a la suma de los productos de todos los pares posibles de impedancias y dividida por la impedancia opuesta del circuito en "T".
Así por ejemplo, en la Figura 1, Z_A viene dada por la suma de los tres productos binarios dividida por Z_3 que es la impedancia opuesta del circuito "T".

2.Transformación "π" $\Rightarrow$ "T"

Cualquier impedancia del circuito en "T" es igual al producto de las dos impedancias adyacentes del circuito en "π" dividido por la suma de las tres impedancias de dicho circuito.
Así por ejemplo, en la Figura 1, Z_1 viene dado por el producto $Z_A * Z_B$ que son impedancias "π" adyacentes, dividido por la suma de las tres impedancias del circuito "π".