EXÁMEN FINAL 11 DE JULIO DE 2001

Dada la siguiente función de transferencia de lazo cerrado :

$$\boxed{G_{(P)} \bullet H_{(P)} = \frac{15P-15}{P^3+13P^2+30P}}$$

A) Trace el diagrama de Nyquist y aplique criterio de estabilidad.
B) Analice estabilidad mediante criterio de Routh-Hurwitz.
C) Si el sistema fuera inestable, indique si es posible estabilizarlo reduciendo la ganancia.

A) PASO 1:

Determinamos el punto de inicio de la curva que representa el diagrama polar. Para ello evaluamos $G_{(P)}.H_{(P)}$ para P que tiende a cero o lo que es lo mismo $G_{(j\omega)}.H_{(j\omega)}$ para ω que tiende a cero.

$$G_{(p)} \cdot H_{(p)} \Big|_{p\to 0} = \left.\frac{-15}{P}\right|_{p\to 0} = |\infty| \underline{|-270°}$$

O en forma similar:

$$G_{(jw)} \cdot H_{(jw)} \Big|_{w\to 0} = \left.\frac{-15}{jw}\right|_{w\to 0} = +j\infty$$

PASO 2:

Determinamos el punto final de la curva que representa el diagrama polar. Para ello evaluamos $G_{(P)}.H_{(P)}$ para P que tiende a infinito o lo que es lo mismo $G_{(j\omega)}\ H_{(j\omega)}$ para ω que tiende a infinito.

$$G_{(p)}H_{(p)}\Big|_{p\to\infty} = \left.\frac{15P}{p^3}\right|_{P\to\infty} = \left.\frac{15}{p^2}\right|_{P\to\infty} = \left.\frac{15}{(\rho\cdot e^{j\theta})^2}\right|_{P\to\infty} =$$

$$\left.\frac{1}{(\rho^2\cdot e^{j2\theta})}\right|_{P\to\infty} = |0|\cdot e^{-j2\cdot\theta} = |0|\cdot \ \underline{|-2\cdot\theta} = |0|\cdot \ \underline{|-180°}$$

O en forma similar:

$$G_{(jw)}H_{(jw)}\Big|_{w\to\infty} = \left.\frac{15\ jw}{(jw)^3}\right|_{w\to\infty} = \left.\frac{15}{(jw)^2}\right|_{P\to\infty} = \left.\frac{15}{-w^2}\right|_{P\to\infty} = -0$$

PASO 3: Realizamos el cambio de P por jω en la función de transferencia:

$$\mathbf{P \Rightarrow j\omega} \qquad \text{es decir:} \qquad \mathbf{G_{(P)}.H_{(P)} \Rightarrow G_{(j\omega)}.H_{(j\omega)}}$$

$$\mathbf{G_{(j\omega)}.H_{(j\omega)} = \frac{j\ 15\ \omega - 15}{-j\ \omega^3 - 13\ \omega^2 + j\ 30\ \omega}}$$

PASO 4: Operamos la función de transferencia $G_{(j\omega)}.H_{(j\omega)}$ de forma tal de separar en parte real y parte imaginaria:

$$\mathbf{G_{(j\omega)}.H_{(j\omega)} = Re|_{\omega} + j\ Im|_{\omega}}$$

$$G_{(j\omega)}H_{(j\omega)} = \underbrace{\frac{645\omega^2 - 15\omega^4}{169\omega^4 + (30\omega - \omega^3)^2}}_{\mathbf{Re|_{\omega}}} + j\underbrace{\frac{450\omega - 210\omega^3}{169\omega^4 + (30\omega - \omega^3)^2}}_{\mathbf{Im|_{\omega}}}$$

PASO 5: Obtenemos el valor de ω que anula la parte real de $G_{(j\omega)}.H_{(j\omega)}$, para determinar en el paso siguiente si existen cortes sobre el eje imaginario.

$$\mathbf{Re|_{\omega} = 0}$$

$$\mathrm{Re}_{(\omega)} = \frac{645\omega^2 - 15\omega^4}{169\omega^4 + (30\omega - \omega^3)^2} = 0$$

Un valor de la frecuencia ω que hace cero la parte real es $\omega = \infty$, pues el grado del numerador es menor que el grado del denominador.
Si eliminamos el denominador de la última expresión tendremos:

$$645\omega^2 - 15\omega^4 = 0 \Rightarrow \omega^2(645 - 15\omega^2) = 0 \therefore \omega = 0 \rightarrow Raiz$$

Finalmente:

$$645 - 15\omega^2 = 0 \therefore \omega = \pm\sqrt{\frac{645}{15}} = \pm 6.557438$$

PASO 6: Reemplazamos en la parte imaginaria el valor de ω que hace cero la parte real, mediante este procedimiento, se determinarán los cortes al eje imaginario. El valor de $\omega = 0$ y de $\omega = \infty$ no es necesario evaluarlos pues esa información, se obtuvo en los PASOS 1 y 2.

$$\mathrm{Im}\Big|_{\omega \rightarrow \mathrm{Re}=0} = \frac{450\omega - 210\omega^3}{169\omega^4 + (30\omega - \omega^3)^2}\Bigg|_{\omega = +6.557438} = -0{,}17595$$

PASO 7: Obtenemos el valor de ω que anula la parte imaginaria de $G_{(j\omega)}.H_{(j\omega)}$, para determinar en el paso siguiente si existen cortes sobre el eje real.

$$\mathbf{Im|_{\omega} = 0}$$

$$\mathrm{Im}_{(\omega)} = \frac{450\omega - 210\omega^3}{169\omega^4 + (30\omega - \omega^3)^2} = 0$$

Un valor de la frecuencia ω que hace cero la parte imaginaria es ω = ∞, pues el grado del numerador es menor que el grado del denominador.
Si eliminamos el denominador de la última expresión observamos que otro valor que hace cero la parte imaginaria es ω = 0 ya que:

$$450\omega - 210\omega^3 = 0 \Rightarrow \omega(450 - 210\omega^2) = 0 \therefore \omega = 0 \rightarrow Raiz$$

Finalmente:

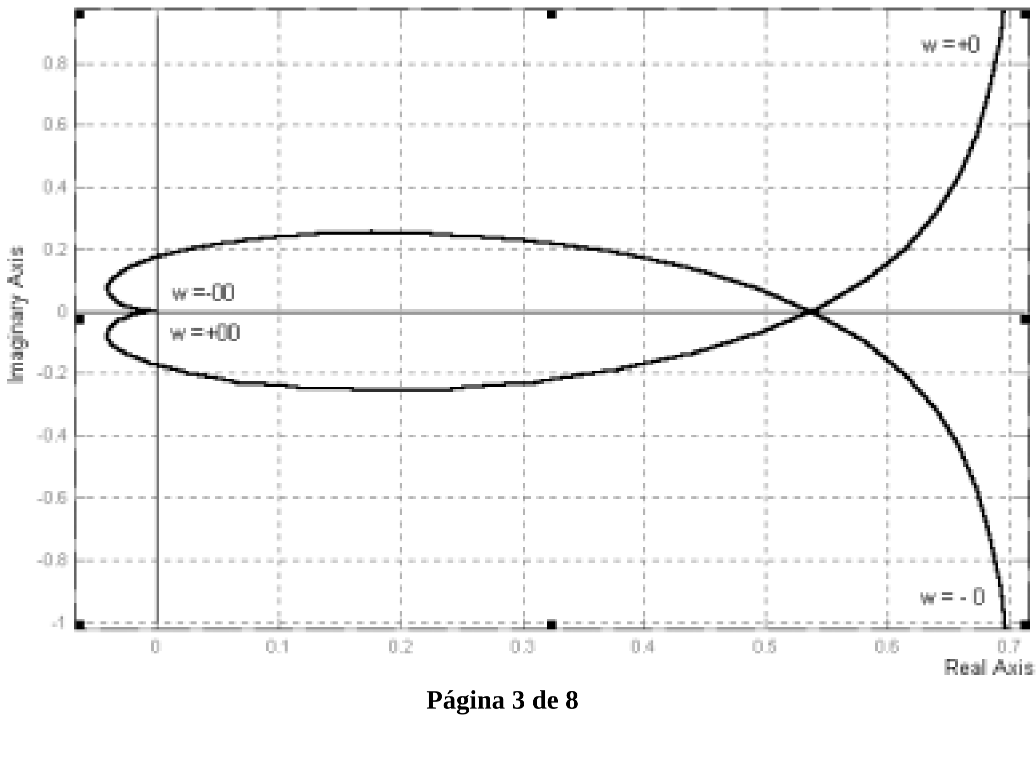
$$450 - 210\omega^2 = 0 \therefore \omega = \pm\sqrt{\frac{450}{210}} = \pm\sqrt{\frac{45}{21}} = \pm 1{,}46385$$

PASO 8: Reemplazamos en la parte real, el valor de ω que hace cero la parte imaginaria, mediante este procedimiento, se determinarán los cortes al eje real.
El valor de ω = 0 y de ω = ∞ no es necesario evaluarlos pues esa información, se obtuvo en los PASOS 1 y 2 respectivamente.
Evaluamos solamente ***el valor*** ***positivo*** de la frecuencia ω obtenida en el paso anterior, (ω = +1,46385) en la parte real de la función de transferencia, y obtendremos de este modo el valor de corte sobre el eje real. El valor de corte al eje real debido a la frecuencia negativa (ω = -1,46385), aparecerá en forma automática cuando, en el PASO 9 se trace el espejo de la curva para las frecuencias negativas.

$$\mathbf{Re}\big|_{\omega \rightarrow Im=0} = \mathbf{Número}$$

$$\mathrm{Re}\,\Big|_{\omega = +1,46385} = \left.\frac{645\,\omega^2 - 15\,\omega^4}{169\,\omega^4 + (30\,\omega - \omega^3)^2}\right|_{\omega = +1,46385} = 0{,}53846$$

PASO 9: Con los datos obtenidos en los PASOS 1 (Inicio del diagrama), 2 (Final del diagrama), 6 (corte al eje Imaginario) y 8 (corte al eje Real), trazamos la curva que representa la función de transferencia para las variaciones de las frecuencias positivas (**ω^+**). Para ello comenzamos trazando desde ω = 0 hasta llegar a ω = ∞. Luego trazamos el espejo sobre el eje real de esta curva, con lo cual obtenemos la traza de frecuencias negativas, ver figura siguiente:



PASO 10: Cerrar la curva para P o ω = 0.

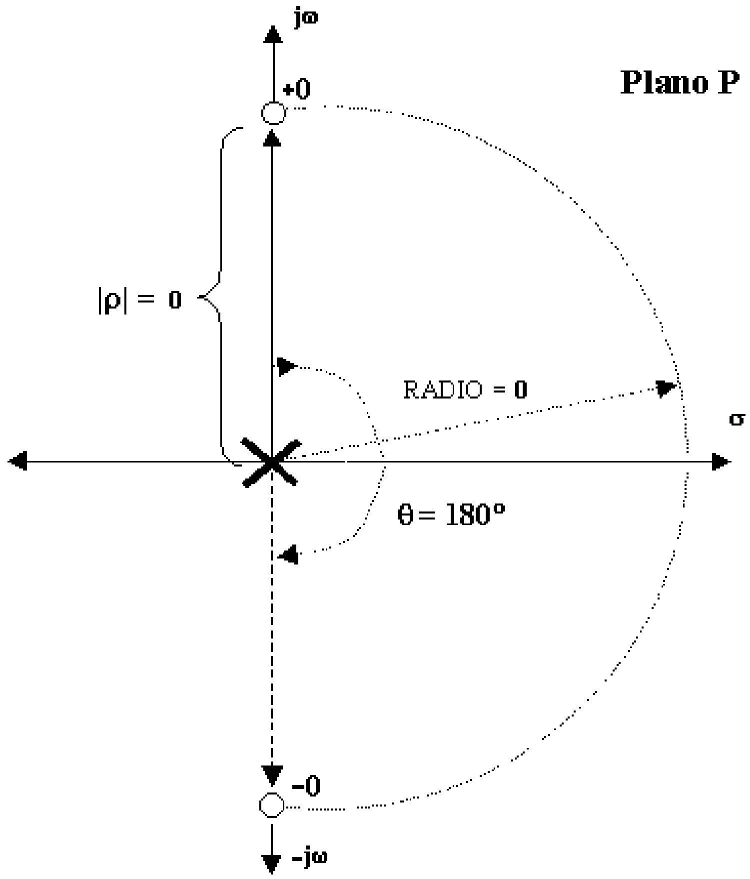
Debido a que la función de transferencia $G_{(P)}.H_{(P)}$. tiene polos en el origen, el diagrama polar nos queda abierto entre ω = +0 y ω = -0, tal como puede verse en la figura anterior.

Para realizar el estudio de cierre del diagrama para P o ω que tienden a cero, repetimos parte del análisis realizado en el PASO 1.

$$G_{(p)}H_{(p)}\Big|_{p\to 0} = \frac{1}{p}\Big|_{P\to\infty} = \frac{1}{\rho\cdot e^{j\cdot\theta}}\Big|_{\rho\to 0} =$$

$$= |\infty|\cdot e^{-j\cdot\theta} = |\infty|\cdot \underline{|-\theta}$$

Analizamos a continuación el plano P para observar lo que sucede cuando se estudia un vector que corresponde a un polo en el origen y se desea hacer la rotación del mismo desde ω = +0 a ω = -0.



En la figura anterior vemos que el vector ρ al pasar desde ω = +0 a ω = -0 en el plano P, describe una trayectoria cuyo ángulo es θ = 180 °. El ángulo φ que describe el vector correspondiente en el plano $G_{(P)}.H_{(P)}$ por transformación conforme, estará dado por la expresión:

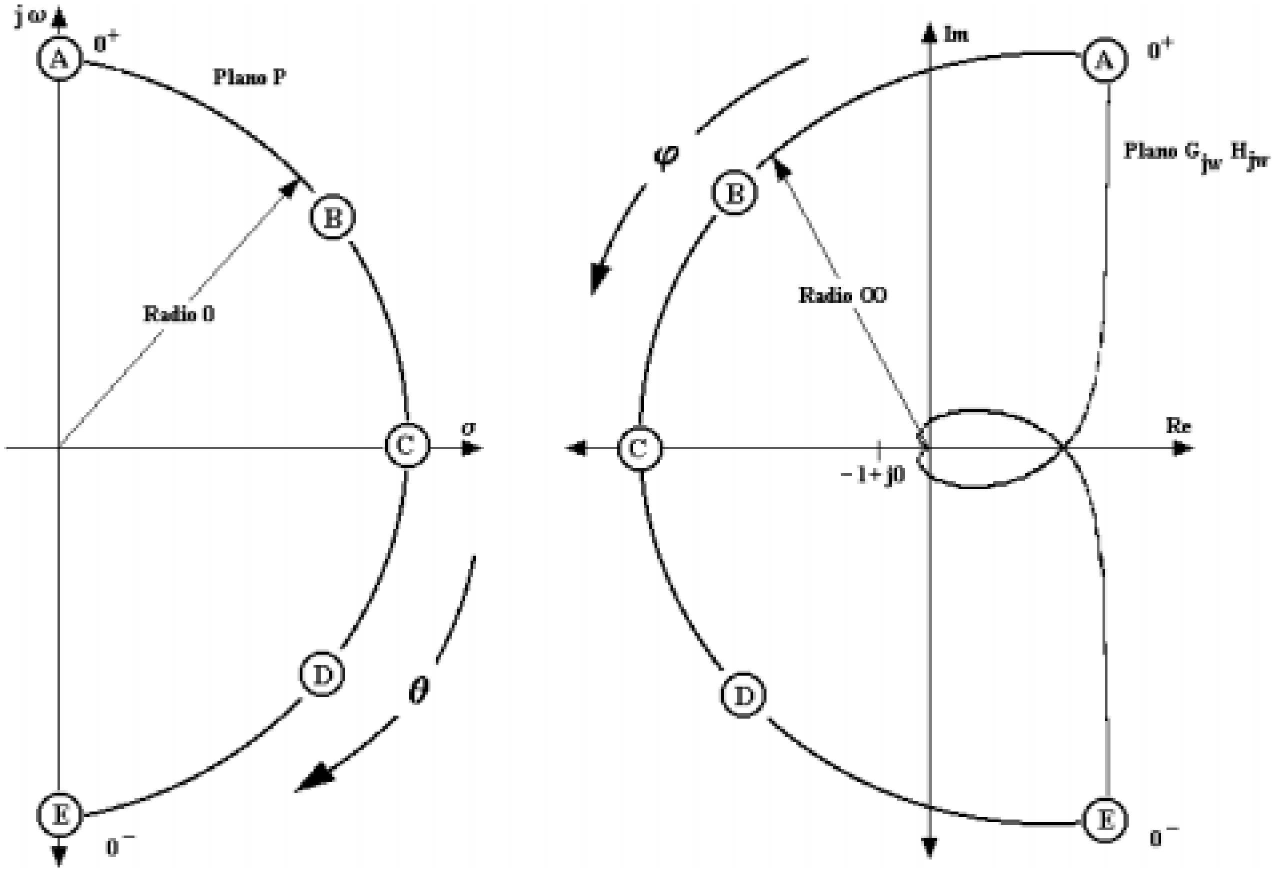
$$\varphi = (-)\ \text{Número de Polos x}\ \theta = (-)\ \text{Número de Polos x}\ 180°$$

para nuestro caso:

$$\varphi = (-)\ \theta = (-)\ 180° \quad \therefore \varphi = -\ 180°$$

El signo (-) aparece porque estamos analizando polos, y como los mismos están en el denominador, al calcular la fase aparece el signo negativo.

Por otra parte el signo (-), nos indica que si en el plano P el vector ρ describió una trayectoria que corta los ejes en un sentido, (En este caso particular sentido horario), el vector que describe el ángulo φ en el plano $G_{(P)}.H_{(P)}$ o $G_{(j\omega)}.H_{(j\omega)}$, debe hacerlo cortando los ejes en el sentido opuesto (Antihorario). En la figura siguiente, se muestra el cierre del diagrama para $P \rightarrow 0$.



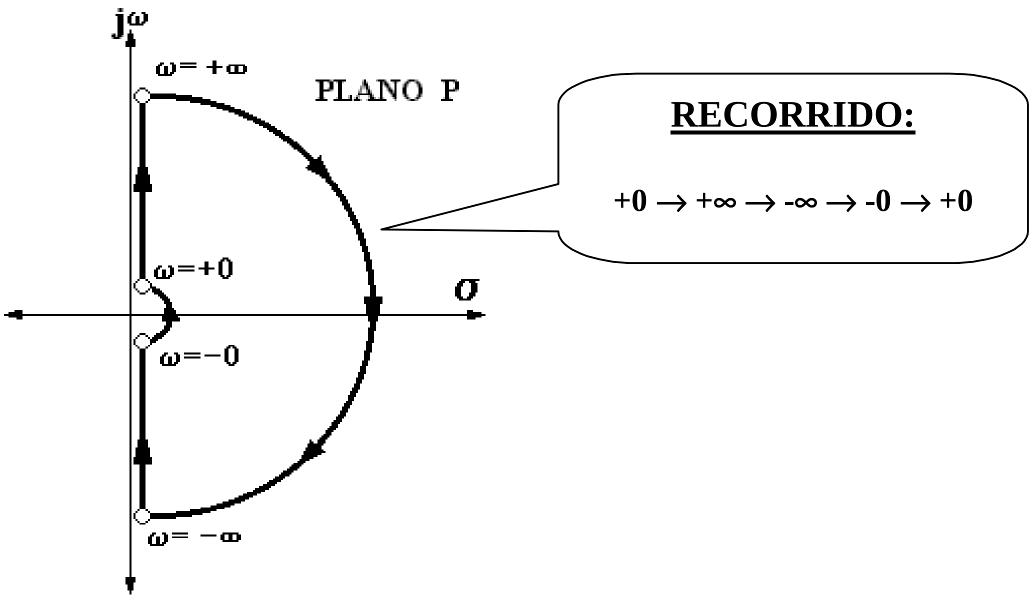
Cierre del diagrama para $P \rightarrow 0$

Las letras A,B,C,D y E encerradas en círculos nos muestran distintas posiciones al hacer girar el vector en el plano P y su correlación con el movimiento del vector correspondiente, en el plano $G_{(P)}.H_{(P)}$.

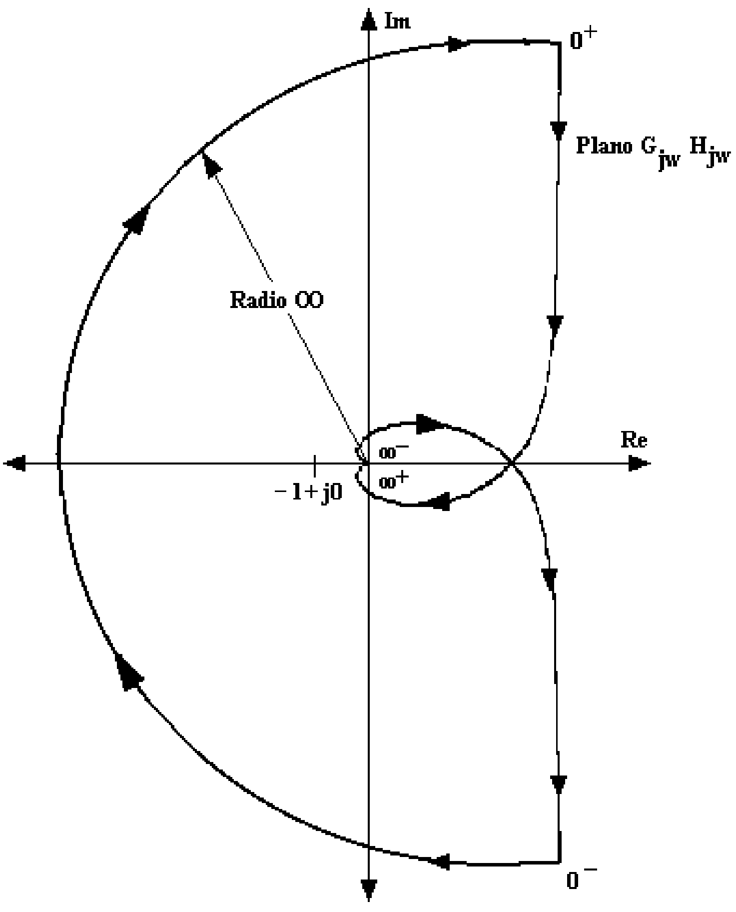
PASO 11: Cerrar la curva para P o $\omega = \infty$.

NOTA : no se aplica en este ejercicio pues la función de transferencia $G_{(P)}.H_{(P)}$, es de lazo cerrado y el análisis de los rodeos del diagrama se realiza sobre el punto **(–1 + j0)** y no en el origen como cuando se realiza el estudio de una Función de transferencia del tipo total ($F_{(P)}$).

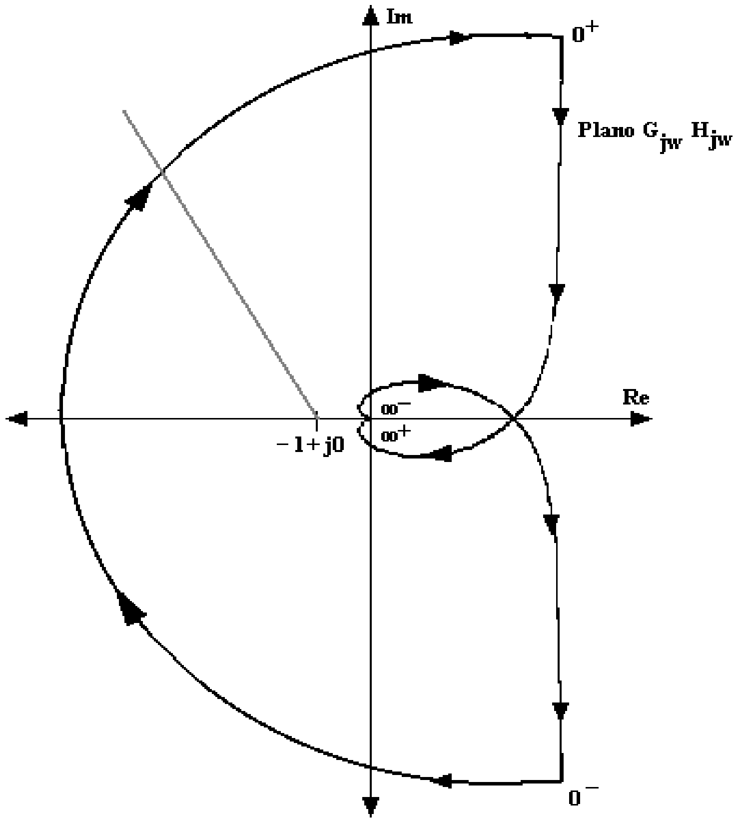
PASO 12: Aplicar el criterio de Nyquist al diagrama obtenido en la figura anterior.
Para la aplicación del criterio de Nyquist, en primer lugar recorremos en un sentido determinado, el llamado recinto de Nyquist en el plano P. Ver figura siguiente.



A continuación trazamos el recorrido elegido (**+0** → +∞ → **-∞** → **-0** → **+0**) mediante flechas en el plano $G_{(P)}.H_{(P)}$ o $G_{(j\omega)}.H_{(j\omega)}$.



Luego nos fijamos cuantas veces y en que sentido se rodea al punto (-1 + j0). Como método práctico se recomienda trazar desde (-1 + j0), una línea que corte al gráfico en cualquier lugar y contar el número de flechas que interceptan esta línea. La diferencia entre flechas a la izquierda y la derecha nos indica el número de rodeos al origen y el sentido del mismo. Ver siguiente figura.



Contamos el número de flechas que tocan a la línea, en este caso una, lo cual nos indica un rodeo al punto (-1 + j0), para determinar el sentido, recordemos que en el plano P, se realizó el recorrido del recinto de Nyquist cortando a los ejes en sentido horario, se observa que el diagrama corta a los ejes en el mismo sentido por lo cual el signo del rodeo es positivo es decir :

$$\boxed{N = +1}$$

Por lo tanto al aplicar el criterio de Nyquist tenemos : $\boxed{N = Z - P = +1}$

donde: **N** = Número de rodeos al origen.
Z = Cantidad de ZEROS de $G_{(P)}.H_{(P)}$ a parte real positiva.
P = Cantidad de POLOS de $G_{(P)}.H_{(P)}$ a parte real positiva.

El resultado obtenido: $\boxed{N = +1}$ nos indica que la función de transferencia $G_{(P)}\ H_{(P)}$ tiene un cero más que polos a parte real positiva, con lo cual, la función de transferencia total $F_{(P)}$ tendrá un polo mas que ceros a parte real positiva y por lo tanto, el sistema será **"INESTABLE"** .

$$F_{(P)} = \frac{G_{(P)}}{1 + G_{(P)} \cdot H_{(P)}} = \frac{G_{(P)}}{1 + \dfrac{CEROS_{(G_{(P)} \cdot H_{(P)})}}{POLOS_{(G_{(P)} \cdot H_{(P)})}}} = \frac{CEROS_{(F_{(P)})}}{POLOS_{(F_{(P)})}}$$

B) APLICACIÓN DE PROCEDIMIENTO DE ROUTH-HURWITZ

Nuestra función de transferencia es :

$$G_{(P)} \bullet H_{(P)} = \frac{15P - 15}{P^3 + 13P^2 + 30P}$$

A la cual le sumamos el valor 1.

$$G_{(P)} \bullet H_{(P)} + 1 = \frac{15P - 15}{P^3 + 13P^2 + 30P} + 1 = \frac{P^3 + 13P^2 + 45P - 15}{P^3 + 13P^2 + 30P}$$

Aplicamos el procedimiento de Routh-Hurwitz al numerador y denominador de $G_{(P)}.H_{(P)}$ +1.

$$\begin{array}{c|cc} P^3 & 1 & 45 \\ P^2 & 13 & -15 \\ P^1 & 46{,}1538 & \\ P^0 & -15 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} P^2 & 1 & 30 \\ P^1 & 13 & \\ P^0 & 30 & \end{array}$$

$\boxed{\text{Num} \rightarrow \text{un cambio de signo } \therefore 1 \text{ Raiz}}$

$\boxed{\text{Den} \rightarrow \text{sin cambio de signos } \therefore 0 \text{ Raiz}}$

Del análisis vemos que tenemos una raiz en el polinomio del numerador de $G_{(P)}.H_{(P)}$ +1 y ninguna raiz en el polinomio del denominador por lo tanto:

$$\boxed{\mathbf{N = Num - Den = Z - P = +1}}$$

Con lo cual se verifica el resultado obtenido mediante el diagrama de Nyquist.

C) Como respuesta al requerimiento de corregir la ganancia si el sistema fuera inestable, no se puede aplicar en este caso, pués el diagrama de Nyquist rodea al punto **–1 + jω** con un radio igual a ∞.